Soustavy lineárních rovnic

1) Vypočítej všechna $a \in R$, pro než má soustava lineárních rovnic s rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a+2 & a+2 & 2 & 6 \\ 2 & a & a-1 & 1 \\ 3 & a+1 & a & 4 \end{array}\right)$$

   a) nemá řešení
   b) má pouze jedno řešení
   c) má nekonečně mnoho řešení (vypočítej)

2) Vypočítej všechna $a \in R$, pro než homogenní soustava lineárních rovnic s maticí

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 4 & a-3 & 1 \\ a+2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) nemá řešení
   b) má pouze jedno řešení (vypočítej)
   c) má nekonečně mnoho řešení (vypočítej)

3) Pro všechna $a \in R$ řeš soustavu lineárních rovnic s rozšířenou maticí soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

4) Pro všechna $p \in R$ řeš soustavu lineárních rovnic s rozšířenou maticí soustavy

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 6 & -4 & 4 & 3 & p \\ 9 & -6 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

5) Pro všechna $p \in R$ řeš soustavu homogenních lineárních rovnic s maticí soustavy

$$\begin{pmatrix} p & -2 & 1 \\ 3 & 2p & -1 \\ p^2 & 1 & p-1 \end{pmatrix}$$

6) Pro všechna $p \in R$ řeš soustavu lineárních rovnic s rozšířenou maticí soustavy

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ p & -4 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & -4 & -6 & 4 \end{array}\right)$$

7) Pro všechna $p \in R$ řeš soustavu lineárních rovnic s rozšířenou maticí soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} p & 1 & 1 & 0 \\ 1 & p & 1 & p-1 \\ 1 & 1 & p & 0 \end{array}\right)$$

Polynomy

8) Na součin ireducibilních (dále nerozložitelných) reálných polynomů rozlož polynom $P(x) = x^5 - 7x^4 - x + 7$.

9) Urči násobnost kořene $x_0 = -1$ pro polynom $P(x) = x^5 - x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 11x - 5$ a tento polynom rozlož na součin ireducibilních (dále nedělitelných) reálných polynomů.

10) Na součin ireducibilních (dále nerozložitelných) reálných polynomů rozlož polynom $P(x) = x^6 + 4x^4 - x^2 - 4$.

11) Najdi všechny kořeny (včetně násobností) polynomu $P(x) = x^5 + 5x^4 + 12x^3 + 16x^2 + 12x + 4$, víš-li, že jeho kořenem je komplexní číslo $-1 + i$.

12) Na součin ireducibilních (dále nerozložitelných) reálných polynomů rozlož polynom $P(x) = x^6 - 3x^5 - 2x^4 + 6x^3 + 12x^2 - 8x - 16$.

Maticové rovnice

13) Vypočítej všechny matice *X*, pro které $XA - A = X$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

14) Vypočítej všechny matice *X*, pro které $AX - A = BX + B$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

15) Vypočítej všechny matice *X*, pro které $AX - A = X$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

16) Vypočítej všechny matice *X*, pro které $XA = X$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

17) Najdi všechna netriviální řešení maticové rovnice $AX = pX$, kde $p \in R$ je parametr.

Hledaná matice *X* je typu (3,1) a $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Analytika

18) Urči bod symetrický s bodem (11, -2, -14) podle roviny určené body (1, 2, 1), (3, 8, -3) a (4, -7, 10).

19) Urči bod symetrický s bodem (1, -2, 4) podle přímky určené body (2, 3, -5) a (1, 2, -2).

20) Urči bod symetrický s bodem (3, -3, 1) podle přímky určené body (-2, 2, -3) a (-1, 1, -1).

21) Urči vzájemnou polohu rovin ρ: $x - 2y + z - 1$ a σ: $X = (0, 1, 2) + r\,(-2, 0, 1) + s\,(0, -2, -1)$, $(r, s \in R)$. (včetně jejich vzdálenosti, případně průsečnice a úhlu)

22) Urči pravoúhlý průmět přímky p: $X = (1, 3, -2) + t\,(3, -2, 2)$, $(t \in R)$ do roviny ρ: 2x - 3y + z - 9 = 0.

23) Vypočítej všechna $\lambda \in R$, pro než se roviny

$\alpha : \lambda x + y + z = \lambda$

$\beta : x + \lambda y + z = 1$

$\gamma : x + y + \lambda z = 1$

protínají v jedné přímce. Najdi její rovnici.

24) Urči vzájemnou polohu přímky AB a roviny určené body C, D a E: A = (0, 3, 0), B = (1, 2, -2), C = (-5, -1, 5), D = (-3, 0, 4), E = (-6, -3, 6). (včetně jejich vzdálenosti, případně průsečíku a úhlu)

25) Vypočítej všechna $\alpha \in R$, pro něž je přímka p: $X = (-4, 4, 3) + t\,(1, 2, \alpha)$, $(t \in R)$ kolmá na průsečnici rovin ρ: x + 2y + z + 5 = 0 a σ: x - 2y - z + 7 = 0.

26) Vypočítej všechna $\alpha \in R$, pro něž přímka p: $X = (0, -2, 0) + t\,(2, 3, \alpha)$, $(t \in R)$ leží v rovině ρ: X = (5, 3, -1) + s (1, 3, 1) + r (2, 1, -1), $(r, s \in R)$.

<u>Báze a dimenze</u>

27) Najdi uspořádanou bázi B lineárního prostoru R^2, takovou, že vektor u = (3,3) má vzhledem k ní souřadnice (1,1) a vektor v = (0,3) má vzhledem k ní souřadnice (2,-1).

28) Najdi uspořádanou bázi B lineárního prostoru R^2, takovou, že vektor u = (3,1) má vzhledem k ní souřadnice (2,-1) a vektor v = (-1,-2) má vzhledem k ní souřadnice (1,2).

29) Ve standardní bázi urči matici lineárního zobrazení A, pro které je $A(1,2) = (-1,2)$ a $A(2,3) = (0,3)$. Najdi obraz vektoru (2,1) v tomto zobrazení.

30) Urči bázi a dimenzi těch aritmetických vektorů $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ pro které platí:

$x_1 + x_3 - 2x_4 = 0 \qquad 2x_1 + 2x_2 - x_4 = 0$

31) Ve standardní bázi urči matici lineárního zobrazení A, pro které je $A(1,-1) = (-2,4)$ a $A(2,3) = (6,3)$. Najdi obraz vektoru (4,1) v tomto zobrazení.

32) Vypočítej všechny vektory $x \in R^3$, které mají stejné souřadnice v uspořádané bázi (b_1, b_2, b_3) jako ve standardní bázi. $b_1 = (1, 1, 1)$, $b_2 = (1, 1, -2)$, $b_3 = (1, 2, 1)$

Zobrazení

33) Jsou dána lineární zobrazení $A: R^3 \to R^2$ a $B: R^2 \to R^3$, pro která platí $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - 2x_3, -x_1 + 2x_2)$ a $B(1, 1) = (3, 1, 2)$, $B(1, -1) = (-1, 3, 0)$. Najdi matici složeného lineárního zobrazení $A \circ B: R^2 \to R^2$ vzhledem ke standardním bázím.

34) Rozhodni, zda lineární zobrazení $A: P_2 \to P_2$ (kde P_2 je prostor polynomů nejvýše 2. stupně), definované předpisem $A(ax^2 + bx + c) = (a + b)x^2 + (a - b + c)x + (2a + c)$, je prosté (zdůvodni). Pokud ano, najdi matici inversního zobrazení A^{-1} vzhledem k uspořádaným bázím $(x^2, x, 1)$ a $(x^2, x, 1)$. Pokud ne, urči bázi a dimensi jádra zobrazení A.

Teorie

35) Definuj souřadnice vektoru vzhledem k uspořádané bázi a dokaž, že jsou určeny jednoznačně.

36) Definuj inversní matici a zdůvodni, proč každá matice může mít nejvýše jednu inversní matici.

37) Definuj pojem báze lineárního prostoru. Ověř z definice, že množina polynomů $\{x^2, (x + 2)^2, x - 1\}$ je bází lineárního prostoru všech polynomů nejvýše druhého stupně.

38) Definuj vektorový součin volných vektorů. Dokaž, že $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ pro libovolné tři vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.