Tuhé těleso, hmotný bod, počet stupňů volnosti

- hmotný bod je model tělesa, nemá tvar ani rozměr, ale má hmotnost
- tuhé těleso nepodléhá deformacím, pevné těleso ano

- Stupně volnosti
    - konstanta určující nejmenší potřebný počet parametrů, které jsou nutnou a postačující podmínkou k určení polohy
    - vypočítá se jako stupně volnosti bodů minus počet vazeb (ty omezují pohyb jednotlivých bodů soustavy)
    - hmotný bod v kartézské soustavě: 3 st. voln.
      hmotný bod na ploše: 2 st. voln.
    - tuhé těleso: 6 st. voln.
    - kyvadlo: 1 st. voln.

Práce, výkon, účinnost

- Práce
    - $dA = \vec{F}\,d\vec{r} \qquad A = \int_K^L \vec{F}\,d\vec{r} \qquad A = \int_{t_1}^{t_2} P\,dt$
        - A práce, kterou vykoná F po dráze mezi K a L [J]
        - F síla [N]
        - dr dráha [m]
        - P výkon [W]
        - t_i čas [s]

- Výkon
    - $P = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F}\,d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\,\vec{v}$
        - dA elementární práce [J]
        - P výkon [W]
        - t čas [s]
        - F síla působící na hmotný bod [N]
        - r dráha [m]
        - v rychlost hmotného bodu [m / s]

- Účinnost
    - $\eta = \frac{P}{P_0}$
        - η účinnost [/]
        - P výkon [W]
        - P_0 příkon [W]

Kinetická a potenciální energie

- Kinetická energie
    - charakterizuje pohybový stav hmotného bodu
    - je rovna práci, kterou hmotný bod vykoná svou setrvačnou silou, přejde-li z

pohybu o určité rychlosti do klidu
(je stejně velká jako práce síly, která působí na hmotný bod, aby jej uvedla do určité rychlosti)

- $W_k = \int_v^0 \vec{F}_s d\vec{r} \qquad \vec{F}_s = -m\vec{a}$

  $\Rightarrow W_k = -\int_v^0 m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = -\int_v^0 m v\, dv = \frac{1}{2} m v^2$

  - W_k kinetická energie [J]
  - F_s setrvačná síla [N]
  - v rychlost [m / s]
  - dr dráha hmotného bodu [m]
  - m hmotnost hmotného bodu [kg]
  - a zrychlení hmotného bodu [m / s^2]

- Potenciální energie
  - je rovna práci, kterou vykoná síla působící proti konzervativní síle, po dráze ze vztažného bodu do jiného bodu (vztažný bod → Wp = 0)
  - $W_p = -\int_{Vz}^{B} \vec{F} d\vec{r}$
    - W_p potenciální energie [J]
    - Vz vztažný bod
    - F síla působící proti konzervativní síle [N]
    - r dráha
  - pro homogení tíhové pole (g = konst.) platí: $W_p = m g h$
    - W_p potenciální energie [J]
    - m hmotnost tělesa [kg]
    - g gravitační zrychlení [m / s^2]
    - h vzdálenost tělesa od povrchu vztažné soustavy [m]

Hmotný střed soustavy hmotných bodů

- střed hmotnosti soustavy se pohybuje tak, jako by v něm byla soustředěna celá hmotnost soustavy a působila na něj výslednice vnějších sil
- $\vec{r}_s = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$
  - rs polohový vektor středu hmotnosti soustavy [/]
  - m hmotnost soustavy [kg]
  - mi hmotnost i-tého hmotného bodu soustavy [kg]
  - ri polohový vektor i-tého hmotného bodu soustavy [/]
  - n počet hmotných bodů soustavy [/]
  - souřadnice hmotného středu soustavy:

    $x_s = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i x_i \qquad y_s = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i y_i \qquad z_s = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i z_i$

První věta Impulsová

- časová změna celkové hybnosti soustavy hmotných bodů je rovna výslednici vnějších sil
- $\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}$
  - p hybnost soustavy hmotných bodů [N s]
  - t čas [s]
  - F výslednice vnejších sil [N]
- pro izolovanou soustavu platí: $\frac{d\vec{p}}{dt}=0 \Rightarrow \vec{p}=konst.$

  → zákon zachování hybnosti izolované soustavy

  - p hybnost soustavy hmotných bodů [N s]
  - t čas [s]

Moment síly vzhledem k bodu, moment hybnosti

- Moment síly
  - $M=F\,q \qquad (q=r\sin\alpha) \qquad \Rightarrow \vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$
    - M moment síly vzhledem k momentovému bodu [N m]
    - F síla s otáčivým účinkem [N]
    - q rameno síly (vzdálenost vektorové přímky síly od momentového bodu) [m]
    - r průvodič délky udávající vzdálenost působiště síly od moment. bodu [m]
    - α úhel mezi r a F [rad]
- Moment hybnosti
  - $\vec{b}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{v}$
    - b moment hybnosti [kg m^2 / s]
    - r průvodič délky udávající vzdálenost působiště síly od moment. bodu [m]
    - m hmotnost [kg]
    - v rychlost otáčení [m / s]

Druhá věta Impulsová

- časová změna celkového momentu hybnosti soustavy se rovná výslednému momentu vnějších sil
- $M=\frac{d\vec{b}}{dt} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}(\vec{r}_i\times\vec{F}_i)=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}(\vec{r}_i\times m_i\vec{v}_i)$

- M moment síly [N / m]
- b moment hybnosti [kg m2 / s]
- t čas [s]
- n počet hmotných bodů v soustavě [/]
- r_i i-tý průvodič délky udávající vzdálenost působiště síly od moment. bodu [m]
- F_i i-tá otáčivá síla [N]
- m_i hmotnost i-tého hmotného bodu [kg]
- v_i rychlost otáčení i-tého hmotného bodu [m / s]

- pro izolovanou soustavu platí: $\frac{d\vec{b}}{dt}=0 \Rightarrow b=konst.$

  → zákon zachování momentu hybnosti

  - b moment hybnosti [kg m^2 / s]
  - t čas [s]

Kyvadlo fyzické, matematické a reverzní

- každý bod kyvadla koná pohyb po kruhovém oblouku
- okamžitá poloha kyvadla je určena úhlovou výchylkou z rovnovážné polohy
- kyvadlo má jeden stupeň volnosti

- Fyzické kyvadlo
  - jakékoliv těleso zavěšené v tíhovém poli otáčivě kolem vodorovné osy, která neprochází těžitěm
  - při vychýlení kyvadla z rovnovážné polohy se kyvadlo díky momentu tíhové síly snaží vrátit do rovnovážné polohy
  - $M=-m g a \sin\alpha \qquad M=J\varepsilon \qquad \varepsilon=\frac{d^2\alpha}{dt^2}$

    $\Rightarrow -m g a \sin\alpha=J\frac{d^2\alpha}{dt^2}$

    - M moment síly [N / m]
    - m hmotnost kyvadla [kg]
    - g gravitační zrychlení [m / s^2]
    - a vzdálenost težiště kyvadla od bodu uchycení [m]
    - α úhel vychýlení kyvadla [rad]
    - J moment setrvačnosti kyvadla [m^2 kg]
    - ε úhlové zrychlení [1 / s^2]
    - t čas [s]
  - $\omega=\sqrt{\frac{m g a}{J}} \qquad T=\frac{2\pi}{\omega} \qquad f=\frac{1}{T} \qquad \tau=\frac{T}{2}=\pi\sqrt{\frac{J}{m g a}}$

    - ω úhlová rychlost [1 / s]
    - m hmotnost kyvadla [kg]
    - g gravitační zrychlení [m / s^2]
    - a vzdálenost těžiště kyvadla od bodu uchycení [m]

- J moment setrvačnosti kyvadla [m^2 kg]
- T perioda (doba kmitu) [s]
- f frekvence kmitu [1 / s]
- τ doba kyvu [s] (vzorec pro α < 6°)

- Matematické kyvadlo
  - hmotný bod zavěšený na tuhém nehmotném vláknu
  - $J = m l^2 \qquad l = a$

    → po dosazení do rovnice doby kyvu u fyzickeho kyvadla:

    $$\tau = \pi \sqrt{\frac{m l^2}{m g l}} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

    - J moment setrvačnosti kyvadla [m^2 kg]
    - m hmotnost kyvadla [kg]
    - g gravitační zrychlení [m / s2]
    - a vzdálenost těžiště od bodu uchycení [m]
    - l délka kyvadla [m]
    - τ doba kyvu [s] (vzorec pro α < 6°)

- Reverzní kyvadlo
  - fyzické kyvadlo, které se může kývat kolem dvou os uložených nesymetricky vůči těžišti, pro které má kyvadlo stejné doby kyvu

Newtonův gravitační zákon

- dva hmotné body o hmotnostech m_1 a m_2, které jsou od sebe vzdáleny r, na sebe působí přitažlivou silou ve směru spojnice těchto bodů, nepřímo úměrnou čtverci jejich vzdáleností a přímo úměrnou jejich hmotnostem
- $$F = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F} = -\frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{r}_0$$
  - F gravitační síla [N]
  - κ gravitační konstanta [N m^2 / kg^2]
  - m_1 hmotnost prvního hmotného bodu [kg]
  - m_2 hmotnost druhého hmotného bodu [kg]
  - r vzdálenost mezi oběma hmotnými body [m]
  - r_0 jednotkový vektor ve směru r [/]

Intenzita a potenciál gravitačního pole, kosmické rychlosti

- Intenzita grav. pole
  - vektorová charakteristika grav. pole představující zrychlení, které je v daném místě stejné pro všechna tělesa bez závislosti na jejich hmotnosti
  - $$\vec{K} = \frac{\vec{F}}{m}$$
    - K intenzita grav. pole [m / s^2]
    - F gravitační síla [N]

- m hmotnost tělesa, na které grav. síla působí [kg]

- Potenciál grav. pole
  - roven potenciální energii jednotkové hmotnosti
  - $V = \frac{W_p}{m} \qquad W_p = -\int_{\infty}^{r} \vec{F} \, d\vec{r} = -\frac{\kappa m M}{r}$
    - V potenciál grav. pole [J / kg]
    - Wp potenciální energie tělesa v grav. poli [J]
    - m hmotnost tělesa v grav. poli [kg]
    - F gravitační síla [N]
    - r vzdálenost mezi tělesy [m]
    - κ gravitační konstanta [N m^2 / kg^2]
    - M hmotnost grav. centra [kg]

- 1. kosmická rychlost
  - kruhová rychlost tělesa obíhajícího v blízkosti povrchu Země
  - $F_d = F_g \;\Rightarrow\; m_1 \frac{v^2}{r} = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2} \;\Rightarrow\; v = \sqrt{\frac{\kappa m_2}{r}} = \sqrt{g r}$
    - F_d dostředivá síla [N]
    - F_g gravitační síla [N]
    - m_1 hmotnost tělesa, na které grav. síla působí
    - m_2 hmotnost grav. centra
    - v 1. kosmická rychlost [m / s]
    - r poloměr kruhové dráhy [m] (poloměr Země)
    - κ gravitační konstanta [N m^2 / kg^2]
    - g grav. zrychlení [m / s2]

- 2. kosmická rychlost
  - rychlost tělesa potřebná k úniku z dosahu gravitačního pole z místa s polohovým vektorem r vůči středu Země do nekonečna
  - $W_k + W_p = 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2} m_1 v^2 - \kappa \frac{m_1 m_2}{r} = 0 \;\Rightarrow\; v = \sqrt{\frac{2 \kappa m_2}{r}}$
    - Wk kinetická energie [J]
    - Wp potenciální energie [J]
    - m1 hmotnost tělesa, na které působí grav. síla [kg]
    - m2 hmotnost grav. centra [kg]
    - v 2. kosmická rychlost [m / s]
    - κ gravitační konstanta [N m2 / kg2]
    - r vzdálenost tělesa od středu Země [m]

Elektrostatické pole, Coulombův zákon, intenzita elektrického pole

- Elektrostatické pole
  - pole konzervativních sil

- náboje bez pohybu → magnetická indukce nulová
- platí zákon zachování el. náboje (náboj se nedá ani vytvořit ani zničit)

- Coulombův zákon
  - síla mezi bodovými náboji je přímo úměrná jejich nábojům a nepřímo úměrná čtverci jejich vzájemné vzdálenosti, závisí na prostředí
  - $\vec{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r^2}\vec{r}_0$
    - F síla, kterou je Q_2 přitahováno ke Q_1[N]
    - ε_0 permitivita vakua [F / m]
    - Q_1 el. náboj [C]
    - Q_2 el. náboj [C]
    - r vzdálenost náboje Q_2 od náboje Q_1 [m]
    - r_0 jednotkový vektor ve směru r [m]

- Intenzita elektrického pole
  - síla na jednotkový náboj
  - znázorňuje se siločarami
  - $\vec{E}=\frac{\vec{F}}{Q}$
    - E intenzita el. pole [N / C = V / m]
    - F síla mezi náboji [N]
    - Q el. náboj [C]

Gaussova věta pro elektrostatické pole ve vakuu

- silový tok uzavřenou plochou je roven náboji uvnitř této plochy dělenému permitivitou vakua
- $\psi=\iint \vec{E}\,d\vec{S} \qquad \Rightarrow \oiint \vec{E}\,d\vec{S}=\frac{Q}{\varepsilon_0}$
  - ψ silový tok [V m]
  - E intenzita el. pole [N / C = V / m]
  - S plocha, kterou silový tok prochází [m^2]
  - Q el. náboj [C]
  - ε_0 permitivita vakua [F / m]

Práce a potenciál v elektrostatickém poli

- Práce
  - energie potřebná k přenesení náboje z jednoho bodu do druhého
  - $A=\int_K^L \vec{F}\,d\vec{r} \qquad \vec{F}=\vec{E}Q_0$

$$\Rightarrow \quad A = Q_0 \int_K^L \vec{E}\, d\vec{r}$$

- A		práce k přemístění náboje z bodu K do L [J]
- F		síla el. pole [N]
- E		intenita el. pole [N / C = V / m]
- Q_0		přemisťovaný el. náboj [C]

- práce po uzavřené dráze je rovna nule → elektrostatické pole je pole konzervativních sil

- Potenciál
  - práce vykonaná vnějšími silami na přenesení náboje 1 C z jednoho bodu elektrostatického pole do druhého
  - $\varphi = \dfrac{W_p}{Q_0} \qquad W_p = -\int_A^B \vec{F}\, d\vec{r} = -Q_0 \int_A^B \vec{E}\, d\vec{r}$

    $\Rightarrow \quad \varphi = -\int_A^B \vec{E}\, d\vec{r}$

    - φ		elektrický potenciál [V]
    - W_p		potenciální energie [J]
    - Q_0		přemisťovaný el. náboj [C]
    - F		síla pole [N]
    - r		polohový vektor referenčního bodu A [/]

Vodič v elektrostatickém poli

- vodič je materiál, který má dostatečně velké množství volných nosičů náboje
- výsledná intenzita ve vodiči v elektrostatickém poli je rovna nule
- uvnitř vodiče je intenzita el. pole nulová, takže vnitřní náboj je také nulový, nenulový náboj je pouze na povrchu vodiče

Gaussova věta pro elektrické pole v látkovém prostředí

- tok elektrické indukce uzavřenou plochou je roven volnému náboji uvnitř plochy
- $\oiint \vec{D}\, d\vec{S} = Q$
  - D		el. indukce [C / m^2]
  - S		uzavřená plocha [m^2]
  - Q		el. náboj uvnitř plochy [C]

Elektrický proud, vektor hustoty elektrického proudu

- Elektrický proud
  - uspořádaný pohyb elektrických nábojů
  - $I = \dfrac{dQ}{dt}$

- I elektrický proud [A]
- Q elektrický náboj [C]
- t čas [s]

- Proudová hustota
    - $\vec{j} = \frac{dI}{d\vec{S}}$ $\vec{j} = \rho \vec{v}$
        - j proudová hustota [A / m^2]
        - I elektrický proud [A]
        - S plocha průřezu vodiče [m^2]
        - ρ hustota el. náboje [C / m^2]
        - v rychlost el. náboje [m / s]

Jouleův zákon v integrálním a diferenciálním tvaru

- diferenciální tvar:

$$p = \frac{dP}{dV} \qquad P = \vec{F}\vec{v} = Q\vec{E}\vec{v}$$

$$\Rightarrow \; p = \vec{E}\vec{v}\frac{dQ}{dV} = \vec{E}\vec{v}\rho \qquad \rho = n e \qquad n e \vec{v} = \vec{j}$$

$$\Rightarrow \; p = \vec{E}\vec{j}$$

- p hustota výkonu [W / m^2]
- P výkon [W]
- V objem [m3]
- F síla [N]
- v driftová rychlost [m / s]
- E intenzita el. pole [N / C = V / m]
- Q el. náboj [C]
- ρ hustota náboje [C / m^2]
- n počet částic [/]
- e elementární náboj [C]
- j proudová hustota [A / m^2]

- integrální tvar
    - $P = I U = I^2 R = \frac{U^2}{R}$
        - P výkon [W]
        - I el. proud [A]
        - U napětí [V]
        - R odpor [Ω]

Kondukční, konvekční a posuvný proud

- Kondukční proud
    - proud protékající vodičem v důsledku působení intenzity el. pole ve vodiči
    - proudová hustota: $\vec{j} = \rho \vec{v}$ $\vec{j} = \gamma \vec{E}$

- j proudová hustota [A / m^2]
- ρ hustota náboje [C / m^2]
- v driftová rychlost [m / s]
- γ měrná vodivost [S / m]
- E intenzita el. pole [N / C = V / m]

- Konvekční proud
  - pohyb náboje je vyvolán mechanicky (roztočením)
  - proudová hustota: $\vec{j}=\rho\vec{u}$
    - j proudová hustota [A / m^2]
    - ρ hustota náboje [C / m^2]
    - u rychlost roztočení [m / s]

- Posuvný proud
  - je dán změnou el. náboje
  - proudová hustota: $\vec{j}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$
    - j proudová hustota [A / m^2]
    - D elektrická indukce [C / m^2]
    - t čas [s]

Indukce magnetického pole

- silová charakteristika magnetického pole
- $\vec{F}=Q(v\times\vec{B})$ $\quad d\vec{F}=I(d\vec{l}\times\vec{B})$
  - F Lorentzova síla [N]
  - Q el. náboj [C]
  - v rychlost náboje [m / s]
  - B magnetická indukce [T]
  - I el. proud [A]
  - l délka [m]
- integrace přes celý vodič: $\vec{F}=\int_L I(d\vec{l}\times\vec{B})$
  - F Ampérova síla [N]
  - L délka vodiče [m]
  - I el. proud [A]
  - l délka úseku vodiče [m]
  - B magnetická indukce [T]

Biotův - Savartův - Laplacův zákon

- $d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r^2}d\vec{l}\times r_0$

- B magnetická indukce [T]
- μ_0 permeabilita vakua [H / m]
- I el. proud [A]
- r poloha vůči dl [m]
- dl element délky vodiče [m]
- r_0 jednotkový vektor ve směru r [m]

Gaussova věta pro magnetické pole

- $$\oiint \vec{B}\, d\,\vec{S} = 0$$
    - B magnetická indukce [T]
    - S uzavřená plocha [m^2]

Zákon celkového proudu

- vodič v ploše uzavřené smyčkou
    - $$\oint \vec{B}\, d\,\vec{l} = \mu_0 I$$
        - B magnetická indukce [T]
        - dl část smyčky [m]
        - μ_0 permeabilita vakua [H / m]
        - I el. proud [A]
- vodič mimo smyčku
    - $$\oint \vec{B}\, d\,\vec{l} = 0$$
        - B magnetická indukce [T]
        - dl část smyčky [m]

Faradayův zákon elektromagnetické indukce

- v uzavřené smyčce, která se pohybuje vůči magnetickému poli, se indukuje elektromotorické napětí číselně rovné změně magnetického toku za jednotku času
- $$U = \oint_L \vec{E}\, d\,\vec{r} \qquad \frac{d\,\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B}\, d\,\vec{S}$$
  $$\Rightarrow \oint \vec{E}\, d\,\vec{r} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B}\, d\,\vec{S}$$
    - U napětí [V]
    - E intenzita el. pole [N / C = V / m]
    - L obvodová smyčka plochy S
    - Φ indukční tok [V s]
    - t čas [s]
    - B magnetická indukce [T]
    - S plocha uzavřená smyčkou [m^2]

Vlastní a vzájemná indukčnost, statická a dynamická definice

- Vlastní indukčnost
  - je závislá na tvaru a rozměrech vodiče a na permeabilitě prostředí
  - většinou se nepočítá, ale stanovuje měřením

  - $\Phi = L\,I$

    - Φ indukční tok [V s]
    - L vlastní indukčnost vodiče [H]
    - I el. proud [A]

- Vzájemná indukčnost
  - závisí na vzájemné vzdálenosti, poloze a rozměrech smyček

  - $\Phi_{21} = M_{21}\,I_1$

    - Φ_{21} magnetický indukční tok procházející oběma smyčkami [V s]
    - M_{21} vzájemná indukčnost [H]
    - I_1 proud procházející první smyčkou [A]

  - při nekonstantním proudu: $U_2 = -\frac{\partial \Phi_{21}}{\partial t} = -M_{21}\frac{dI_1}{dt}$

    - U_2 napětí na druhé smyčce [V]
    - Φ_{21} magnetický indukční tok procházející oběma smyčkami [V s]
    - M_{21} vzájemná indukčnost [H]
    - I_1 proud procházející první smyčkou [A]
    - t čas [s]

Energie magnetického pole, hustota energie magnetického pole

- Energie magnetického pole
  - $dW_m = \frac{1}{2} I\, d\Phi \qquad I = \oint H\, dl = H\, l \qquad d\Phi = B\, dS \qquad l\, dS = dV$

    $\Rightarrow\ dW_m = \frac{1}{2} H\, B\, dV$

    - dW_m magnetická energie [J]
    - I el. proud v přímkovém vodiči [A]
    - Φ magnetický indukční tok [V s]
    - H intenzita magnetického pole [A / m]
    - l délka cívky [m]
    - B magnetická indukce [T]
    - dS průřez indukční magnetické indukce kruhového tvaru [m^2]
    - dV elementární objem [m^3]

- Hustota energie magnetického pole
  - $w = \frac{dW_m}{dV} \ \Rightarrow\ w = \frac{1}{2} H\, B$ (pro izotropní prostředí)
  - pro neizotropní prostředí platí pouze vektorově: $w = \frac{1}{2}\vec{H}\,\vec{B}$

- w hustota magnetické energie [J / m3]
- dW_m magnetická energie [J]
- dV elementární objem [m^3]
- H intenzita magnetického pole [A / m]
- B magnetická indukce [T]

Vedení elektřiny v kapalinách, Faradayovy zákony elektrolýzy

- chemicky čisté kapaliny jsou většinou velmi špatné vodiče
- roztoky s disociovanými ionty (elektrolyty) vedou proud pohybem iontů (např. kuchyňská sůl ve vodě)

- 1. Faradayův zákon
    - hmotnost látky vyloučená na elektrodě, je úměrná el. proudu a času, po který proud elektrolytem prochází

    - $m=A\,I\,t \qquad m=A\,Q$

        - m hmotnost látky vyloučené na elektrodě [kg]
        - A elektrochemický ekvivalent (konstantní pro dané ionty) [kg / C]
        - I el. proud [A]
        - t čas, po který prochází elektrolytem el. proud [s]
        - Q náboj, který vylučoval na elektrodě m látky [C]

- 2. Faradayův zákon
    - $A=\frac{M}{v\,F}$

        - A elektrochemický ekvivalent (konstantní pro dané ionty) [kg / C]
        - M hmotnost jednoho molu [kg / mol]
        - v valence (kolik element. náb. nese jeden iont) [/]
        - F Faradayova konstanta [C / mol]

- Faradayovy zákony nezávisí na tvaru a velikosti elektrod, na teplotě ani na koncentraci v elektrolytu

Přímočarý pohyb se koná z klidu se zrychlením, které rovnoměrně roste tak, že v okamžiku t_1 má hodnotu a_1. Urči závislost rychlosti a dráhy pohybu na čase.

- nerovnoměrně zrychlený pohyb → $a(t)=k\,t+a_{0,}\;\; a_0=0 \qquad k=\frac{a_1}{t_1}$

$$v(t)=\int_0^t a(t)\,dt=\int_0^t \frac{a_1}{t_1}\,dt=\frac{a_1}{2t_1}t^2$$
$$s(t)=\int_0^t v(t)\,dt=\int_0^t \frac{a_1}{2t_1}t^2\,dt=\frac{a_1}{6t_1}t^3$$

- a zrychlení [m/s^2]
  k konstanta udávající závislost zrychlení na čase [m/s^3]
  t čas [s]
  v rychlost [m/s]
  s dráha [m]

Pod jakým elevančním úhlem α musí být vystřelena střela počáteční rychlostí v_0, aby zasáhla cíl C (x_1, y_1)?

- $v_{0x}=v_0\cos\alpha \qquad v_{0y}=v_0\sin\alpha$
  $v_x=v_{0x}=v_0\cos\alpha \qquad v_y=v_{0y}-g\,t=v_0\sin\alpha-g\,t$ (zpomalování gravitačním polem)

$$s=\int_0^t v_0\,dt \quad\rightarrow\quad x=t\,v_0\cos\alpha \qquad y=t\,v_0\sin\alpha-\frac{1}{2}g\,t^2$$

$$x_1=t\,v_0\cos\alpha \;\Rightarrow\; t=\frac{x_1}{v_0\cos\alpha}$$
$$y_1=t\,v_0\sin\alpha-\frac{1}{2}g\,t$$

$Ted\ uz\ jen\ matematicky\ vyjadrit\ \alpha$

- α úhel výstřelu [rad]
  v_0 počáteční rychlost střely [m/s]
  v_{0x} x-ová složka počáteční rychlosti střely [m/s]
  v_{0y} y-ová slžka počáteční rychlosti střely [m/s]
  g gravitační zrychlení [m/s^2]
  t čas [s]
  x_1 x-ová souřadnice cíle
  y_1 y-ová souřadnice cíle

Setrvačník se otáčí s frekvencí n otáček za minutu. Bržděním přejde do pohybu rovnoměrně zpožděného a zastaví se za čas t_0 od začátku brždění. Urči úhlové zrychlení a počet otáček, které vykoná od začátku brždění do zastavení.

- $\omega(t)=\omega_0+\varepsilon\,t$, $\omega_0=2\pi f \qquad \omega(t_0)=\omega_0+\varepsilon\,t_0=0 \;\Rightarrow\; \varepsilon=-\frac{\omega_0}{t_0} \;\Rightarrow\; \varepsilon=-\frac{2\pi f}{t_0} \;\Rightarrow\; \varepsilon=-\frac{\pi n}{30\,t_0}$

$$\alpha_0=\int_0^{t_0}\omega(t)\,dt=\int_0^{t_0}\omega_0+\varepsilon t\,dt=\omega_0 t+\frac{\varepsilon t^2}{2}$$

$$N=\frac{\alpha_0}{2\pi}$$

- ω_0 počáteční úhlová rychlost [1/s = Hz]
- $\omega(t)$ úhlová rychlost v čase t [1/s = Hz]
- $\omega(t_0)$ úhlová rychlost v čase t_0 [1/s = Hz]
- ε úhlové zrychlení [$1/s^2$ = Hz^2]
- t čas [s]
- t_0 čas, kdy se zastaví otáčení [s]
- f frekvence [1/s = Hz]
- n počet otáček před bržděním [/]
- N počet otáček za dobu brždění [/]
- α_0 celkový úhel brždění [rad]

Vypočítej práci proměnné síly $\vec{F}=(x^2-2xy)\vec{i}+(y^2-2xy)\vec{j}$ po dráze dané parametrickými rovnicemi $x=t\,,\,y=t^2$ z bodu A_1 (1,1) do bodu A_2 (-1,1).

$$A=\int_{A_1}^{A_2}\vec{F}\,d\vec{r} \qquad d\vec{r}=\vec{i}\,dx+\vec{j}\,dy\ \Rightarrow\ derivace\ x\ a\ y\ \Rightarrow\ d\vec{r}=\vec{i}\,dt+\vec{j}\,2t\,dt$$

$$\Rightarrow\ A=\int_{A_1}^{A_2}[(x^2-2xy)\vec{i}+(y^2-2xy)\vec{j}](\vec{i}\,dx+\vec{j}\,dy)=\int_{A_1}^{A_2}(x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$$

$$x=t\,,\,y=t^2\ \Rightarrow\ y=t\,x\ \Rightarrow\ t=\frac{y}{x}\ \Rightarrow\ t_1=1,t_2=-1$$

$$d\,x=dt\,,\,dy=2\,t\,dt$$

$$\Rightarrow\ A=\int_{t_1}^{t_2}(t^2-2t^3)dt+(t^4-2t^3)2t\,dt=$$

$$=\int_1^{-1}(t^2-2t^3+2t^5-4t^4)dt=[\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{2}+\frac{t^6}{3}-\frac{4t^5}{5}]_1^{-1}=\frac{14}{15}J$$

- A práce síly F [J]
- F síla [N]
- d**r** změna polohového vektoru [/]
- **i** jednotkový vektror na ose x [/]
- **j** jednotkový vektor na ose y [/]
- t parametr [/]

Sáňky jedou z kopce rovnoměrně zrychleně po dráze AB a pod svahem rovnoměrně zpožděně po vodorovné dráze BC, na které se zastaví. Urči koeficient tření, je-li dán úhel sklonu svahu a délky drah AB a BC.

$$W_{kB}=F_{tBC}\ \Rightarrow\ \frac{1}{2}m v_B^2=F_t s_2\ \Rightarrow\ \frac{1}{2}m v_B^2=F_n\mu s_2\ \Rightarrow\ \frac{1}{2}m v_B^2=m\,g\,\mu\,s_2$$

$$W_{kB}=(G\sin\alpha-F_t)s_1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}m v_B^2=(m g\sin\alpha-\mu F_n)s_1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}m v_B^2=(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)m g s_1$$

$$\Rightarrow\; v_B^2=\frac{2 m g s_1(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)}{m} \;\Rightarrow\; v_B^2=2 g s_1(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)$$

$$\Rightarrow\; m g s_1(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)=m g \mu s_2 \;\Rightarrow\; s_1(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)=\mu s_2 \;\Rightarrow\; \mu=\frac{s_1\sin\alpha}{s_2+s_1\cos\alpha}$$

W_{kB}	kinetická energie v bodě zlomu [J]
F_t	třecí síla [N]
F_{tBC}	třecí síla po dráze pod svahem [N]
m	hmotnost sáněk [kg]
v_B	rychlost v bodě zlomu [m/s]
s_1	dráha AB [m]
s_2	dráha BC [m]
F_n	normálová síla [N]
α	úhel sklonu svahu [rad]
μ	koeficient tření [/]
g	gravitační zrychlení [m/s^2]

Z vrcholu dokonale hladké koule o poloměru R se po jejím povrchu začne pohybovat hmotný bod. Urči vertikální polohu místa, ve kterém opustí povrch koule, dráhu, kterou do tohoto okamžiku urazil, a velikost rychlosti, se kterou povrch koule opustí.

$$G\cos\alpha=F_o \;\Rightarrow\; m g\cos\alpha=m\frac{v^2}{R} \;\Rightarrow\; g\cos\alpha=\frac{v^2}{R}$$

$$\cos\alpha=\frac{R-h}{R} \qquad \Rightarrow\; v^2=g(R-h)$$

$$W_p=W_k \;\Rightarrow\; m g h=\frac{1}{2}m v^2 \;\Rightarrow\; v^2=2 g h \;\Rightarrow\; v=\sqrt{2 g h}$$

$$\Rightarrow\; 2 g h=g(R-h) \;\Rightarrow\; 2h=R-h \;\Rightarrow\; h=\frac{R}{3}$$

$$s=R\alpha$$

$$\alpha=\arccos\frac{R-h}{R} \;\Rightarrow\; \alpha=\arccos\frac{R-\frac{R}{3}}{R} \;\Rightarrow\; \alpha=\arccos\left(R-\frac{1}{3}\right)$$

$$\Rightarrow\; s=R\arccos\left(R-\frac{1}{3}\right)$$

R	poloměr koule [m]
G	gravitační síla [N]
F_o	odstředivá síla [N]
m	hmotnost hmotného bodu [kg]
g	gravitační zrychlení [m/s^2]
v	rychlost hmotného bodu [m/s]
h	vertikální poloha místa, kde hmotný bod opustí povrch koule [m]

α úhel od vrcholu koule k místu, kde ji hmotný bod opustí [rad]
s dráha, kterou hmotný bod urazí po povrchu koule [m]

Homogenní nosník hmotnosti m a délky l spočívá na dvou podpěrách. Ve vzdálenosti x od jednoho konce je zatížen hmotností m1. Sestav podmínky rovnováhy nosníku a urči reakce na podpěrách.

$$\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{G}+\vec{G}_1=0 \;\Rightarrow\; F_1+F_2-G-G_1=0$$

$$G\frac{1}{2}l+G_1(l-x)-F_1 l=0$$ (pro počátek v F_2)

$$\Rightarrow\; F_1=\frac{G\frac{1}{2}l+G_1(l-x)}{l}=\frac{Gl+G_1(l-x)}{2l}=\frac{mgl+m_1 g(l-x)}{2l}$$

$$\Rightarrow\; F_2=G+G_1-\frac{Gl+G_1(l-x)}{2l}=mg+m_1 g-\frac{mgl+m_1 g(l-x)}{2l}$$

m hmotnost nosníku [kg]
l délka nosníku [m]
x vzdálenost od okraje nosníku F2 [m]
m_1 hmotnost zátěže [kg]
F_1 síla působící na nosník na jedné podpěře [N]
F_2 síla působící na nosník na druhé podpěře [N]
G gravitační síla působící na nosník [N]
G_1 gravitační síla působící na zátěž [N]
g gravitační zrychlení [m/s^2]

Z bodu A nakloněné roviny úhlu α se začne valit beze smyku homogenní kotouč. Urči jeho rychlost v bodě B a čas potřebný k proběhnutí dráhy mezi A a B.

$$W_A=W_p=mgh=mgs\sin\alpha$$
$$W_B=W_k=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}J\omega^2,\quad J=\frac{1}{2}mr^2,\quad \omega=\frac{v}{r}$$
$$\Rightarrow\; W_B=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{4}mv^2=\frac{3}{4}mv^2$$

$$W_A=W_B \;\Rightarrow\; mgs\sin\alpha=\frac{3}{4}mv^2 \;\Rightarrow\; 4gs\sin\alpha=3v^2 \;\Rightarrow\; v=\sqrt{\frac{4}{3}gs\sin\alpha}$$

$$v=\frac{ds}{dt} \;\Rightarrow\; dt=\frac{ds}{v} \;\Rightarrow\; dt=\frac{ds}{\sqrt{\frac{4}{3}gs\sin\alpha}} \;\Rightarrow\; \int dt=\sqrt{\frac{3}{4g\sin\alpha}}\int\frac{ds}{\sqrt{s}} \;\Rightarrow\; t=\sqrt{\frac{3s}{g\sin\alpha}}$$

WA energie v bodě A [J]
WB energie v bodě B [J]
Wp potenciální energie [J]
Wk kinetická energie [J]
m hmotnost kotouče [kg]

g gravitační zrychlení [m/s^2]
s dráha mezi A a B [m]
v rychlost valení [m/s]
h počáteční výška kotouče [m]
J moment setrvačnosti [kg/m^2]
ω úhlová rychlost [m/s]
α úhel sklonu nakloněné roviny [rad]
r poloměr kotouče [m]

Odvoď vztah pro kapacitu kulového kondenzátoru.

$$U=\int_{R_1}^{R_2} E\,dr \qquad E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}$$

$$\Rightarrow U=\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left[-\frac{1}{r^2}\right]_{R_1}^{R_2}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\,\frac{R_2-R_1}{R_1R_2}$$

$$C=\frac{Q}{U} \Rightarrow C=4\pi\varepsilon\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}$$

U napětí mezi kulovými plochami [V]
E intenzita el. pole [V/m]
R1 poloměr vnitřní koule [m]
R2 poloměr vnější koule [m]
Q elektrický náboj [C]
ε permitivita dielektrika [/]
r střední poloměr [m]
C kapacita kondenzátoru [F]

Odvoď vztah pro kapacitu válcového kondenzátoru.

$$U=\int_{R_1}^{R_2} E\,dr \qquad E=\frac{Q}{2\pi\varepsilon l r}$$

$$\Rightarrow U=\frac{Q}{2\pi\varepsilon l}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r}=\frac{Q}{2\pi\varepsilon l}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$C=\frac{Q}{U} \Rightarrow C=\frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

U napětí mezi válci [V]
E intenzita el. pole [V/m]
R1 poloměr vnitřního válce [m]
R2 poloměr vnějšího válce [m]
Q elektrický náboj [C]
ε permitivita dielektrika [/]
r střední poloměr [m]
C kapacita kondenzátoru [F]
l délka válců [m]